数理解析研究所講究録
1103 巻 1999 年 30-38

The fundamental lemma for the Bessel and Novodvorsky subgroups of GSp (4) (joint work with Joseph A. Shalika)

Masaaki Furusawa
古澤 昌秋
広島大学 理学部 数学教室*

講演日： 1999 年 1 月 26 日

上記の表題で講演を行った。表題にある通り、この研究はジョンズ・ホプキンズ大学の Joseph A. Shalika との共同研究である。すでにこの研究結果の要旨は、[4] として出版されている。証明の詳細は、本論文 [5] として、現在執筆中である。

主定理は二つの非アルキメデス局所 Kloosterman 積分の間の等式である。それ自体は、極めて技術的な結果なので、それを考察するに至った経緯から説明したい。

1 Böchererの予想

論文 [1] において、Böcherer は次の予想を提出した。

予想 (Böcherer) . Φ を重さ k の $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z})$ に関する次数 2 のジーゲル尖点形式で、ヘッケ環の同時固有函数に成っているものとする。

$$\Phi(Z) = \sum_{T>0} a(T, \Phi) \exp\left(2\pi\sqrt{-1}\,\mathrm{Tr}\,(\mathrm{TZ})\right)$$

*1999 年 4 月 1 日より：大阪市立大学大学院理学研究科・理学部　数学教室

を Φ のフーリエ展開とする。ただしこの和において T は、正定値で

$$T = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} \qquad (a, b, c \in \mathbb{Z})$$

の形の対称行列全体をわたる。いま、虚二次体 $\mathbb{Q}\left(\sqrt{-D}\right)$ の判別式 $-D$ に対して、

$$B_D(\Phi) = \sum_{\{T|\det T = D/4\}/\sim} \frac{a(T, \Phi)}{\varepsilon(T)}$$

とおく。ただし、$T_1 \sim T_2$ とは、ある $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ に対して、${}^t\gamma T_1 \gamma = T_2$ となることであり、$\varepsilon(T) = \#\{\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid {}^t\gamma \mathrm{T} \gamma = \mathrm{T}\}$ である。

このとき、D に依らず、Φ のみに依存する定数 C_Φ が存在して、

$$L\left(k-1, \Phi \otimes \left(\frac{-D}{*}\right)\right) = C_\Phi \cdot D^{-k+1} \cdot \mid B_D(\Phi) \mid^2 \tag{1}$$

となる。ただし、左辺は Φ のスピノル L 函数を二次拡大 $\mathbb{Q}\left(\sqrt{-D}\right)/\mathbb{Q}$ に対応する二次指標でひねったものの函数等式の中心での値を表す。

Böcherer は [1] において、予想を提出すると同時に、この主張が実際に、アイゼンシュタイン級数と斎藤 - 黒川持ち上げに対して成り立つことを示している。また、Böcherer と Sculze-Pillot は、論文 [2] において、(1) が吉田持ち上げの場合にも成り立つことを示している。

この予想が大変興味深いことは説明を待たないと思う。例えば、Shalika (GSp (4) の逆定理の見地から) と吉田 [14] は独立に、$\mathbb{Q}$ 上のアーベル曲面の Hasse-Weil ゼーター函数は、次数 2、重さ 2 のジーゲル保型形式のスピノル L 函数によって記述できると予想した。もちろんこれは楕円曲線に関する志村 - 谷山予想のアーベル曲面への一般化とみなせる。それをふまえると、Böcherer の予想は GL (2) に関する Waldspurger の定理の GSp (4) への一般化であり、この主張はアーベル曲面の数論的理解に、Waldspurger の定理が楕円曲線の場合に果たした役割を果たすものと期待される。

ここで、Böcherer は比例定数 C_Φ がどのような数であるかについては、言及していないことを注意しておきたい。比例定数の同定は、Deligne の特殊値に関する周期予想 [3] の観点からも大変興味深い問題である。Böcherer の予想を比例定数をはっきりと同定した形で再定式化し、証明への道筋を与えるのが本研究の主たる動機である。

古澤は以前に、この予想へのTheta持ち上げを用いたアプローチについて話したことがある。現在でも、そのアプローチの有効性を信じているが、その方法では、Sp(4)の二重被覆群のWhittaker係数を持つような保型形式を用いる。現時点では、このような保型形式の数論的理解は十分とは言えず、予想の主張の数論的性格から、GSp(4)の枠内で収まるアプローチの方が望ましいと考えられる。それが、これから述べる新しいアプローチを模索した理由である。

2 相対跡公式

まず記号を定める。F を代数体とし、$G = \mathrm{GSp}(4)$ を

$$G = \left\{ g \in \mathrm{GL}(4) \mid {}^t g \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1_2 \\ -1_2 & 0 \end{smallmatrix} \right) g = \lambda(g) \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1_2 \\ -1_2 & 0 \end{smallmatrix} \right), \lambda(g) \in \mathrm{GL}(1) \right\} \quad (2)$$

によって定める。我々は G を F 上の代数群とみなす。次に G の**上Novodvorsky部分群** H を、

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & & & \\ & b & & \\ & & b & \\ & & & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_2 & X \\ 0 & 1_2 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathrm{GL}(1),\ X = {}^t X \in \mathrm{Mat}_{2\times 2} \right\}$$

によって定め、G の**下Novodvorsky部分群** $\bar{H}$ を $\bar{H} = \{ {}^t h \mid h \in H \}$ によって定める。

D を F 上の中心的単純四元数環とし、$x \mapsto \bar{x}$ で D の標準的involutionを表すことにする。このとき、D 上の**次数2のquaternion similitude unitary group** G_D が、

$$G_D = \{ g \in \mathrm{GL}_2(D) \mid g^* \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix} \right) g = \mu(g) \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix} \right), \mu(g) \in \mathrm{GL}(1) \} \quad (3)$$

によって定まる。ただし、ここで、$g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix} \right)$ に対して、$g^* = \left(\begin{smallmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{smallmatrix} \right)$ である。我々は、G_D を F 上の代数群とみなす。ここで、

$$D = \mathrm{Mat}_{2\times 2}(F) \text{ のとき、} G_D \simeq \mathrm{GSp}(4)$$

であることに注意しておく。

次に、$-d \in F^\times \setminus (F^\times)^2$ とし、$\eta = \sqrt{-d},\ E = F(\eta)$ とする。$\varepsilon \in F^\times$ に対して、

$$D_\varepsilon = \left\{ \begin{pmatrix} a & b\varepsilon \\ b^\sigma & a^\sigma \end{pmatrix} \mid a, b \in E \right\} \subset \mathrm{Mat}_{2\times 2}(E) \quad (4)$$

とする。ただし、$\alpha \mapsto \alpha^\sigma$ は、Gal (E/F) の唯一の非自明な元を表す。このとき、$\varepsilon \mapsto D_\varepsilon$ は、$F^\times/N_{E/F}(E^\times)$ と、E と同型な体を含むような F 上の中心的単純四元数環の同型類全体の集合 $X(E:F)$ との全単射を与えることに注意しておく。簡単のために、G_ε によって、G_{D_ε} のことを表すことにする。

このとき、G_ε の**上 Bessel 部分群**R_ε を

$$R_\varepsilon = \left\{ \begin{pmatrix} a & & & \\ & a^\sigma & & \\ & & a & \\ & & & a^\sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| a \in E^\times, x \in D_\varepsilon^- \right\}$$

によって定める。ただし、ここで、$D_\varepsilon^- = \{\alpha \in D_\varepsilon | \operatorname{tr}(\alpha) = 0\}$ である。そして、G_ε の**下 Bessel 部分群**$\bar{R}_\varepsilon$ を $\bar{R}_\varepsilon = \{{}^t r | r \in R_\varepsilon\}$ によって定める。

我々の予想する相対跡公式を記述しよう。ψ を F のアデール環 $\mathbb{A}$ の F 上では自明な、非自明な加法的指標とする。$H(\mathbb{A})$ 上の指標 θ を

$$\theta\left[\begin{pmatrix} a & & & \\ & b & & \\ & & b & \\ & & & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_2 & X \\ 0 & 1_2 \end{pmatrix}\right] = \chi(ab)\,\psi\left[\operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X\right)\right]$$

によって定める。ただし、ここで χ は二次拡大 E/F に対応する二次指標とする。記号の濫用になるが、ψ で

$$\psi\left[\begin{pmatrix} a & & & \\ & b & & \\ & & b & \\ & & & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_2 & 0 \\ Y & 1_2 \end{pmatrix}\right] = \psi\left[\operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} Y\right)\right].$$

によって定まる $\bar{H}(\mathbb{A})$ の指標を表す。そして、$R_\varepsilon(\mathbb{A})$ (resp. $\bar{R}_\varepsilon(\mathbb{A})$) の指標 τ (resp. ξ) を

$$\tau\left[\begin{pmatrix} a & & & \\ & a^\sigma & & \\ & & a & \\ & & & a^\sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \psi\left[\operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} -\eta & 0 \\ 0 & \eta \end{pmatrix} x\right)\right],$$

$$\xi\left[\begin{pmatrix} a & & & \\ & a^\sigma & & \\ & & a & \\ & & & a^\sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix}\right] = \psi\left[\operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} -\eta^{-1} & 0 \\ 0 & \eta^{-1} \end{pmatrix} y\right)\right]$$

によって定める。(菅野 [12] は、G_ε のスピノル L 函数の積分表示のために、このような指標を考察している。)

Φ を $G(\mathbb{A})/Z(\mathbb{A})$ 上の滑らかでコンパクトな台をもつ函数とする。ただし、Z は G の中心を表す。通常どおりに核函数を

$$K_\Phi(g_1, g_2) = \sum_{\gamma \in Z(F)\backslash G(F)} \Phi\left(g_1^{-1}\gamma g_2\right)$$

によって定める。同様に各$\varepsilon \in F^{\times}/N_{E/F}(F^{\times})$について$\Phi_{\varepsilon}$をコンパクトな台を持つ$G_{\varepsilon}(\mathbb{A})/Z_{\varepsilon}(\mathbb{A})$上の滑らかな函数とする。ただし、$Z_{\varepsilon}$は$G_{\varepsilon}$の中心を表す。すると、核函数$K_{\Phi_{\varepsilon}}$が同様にして定まる。我々は、ほとんどすべての$\varepsilon$について、$\Phi_{\varepsilon} \equiv 0$が成り立つと仮定する。

予想 (Furusawa-Shalika) 1. 次の相対跡公式が成り立つ：

$$\int_{\bar{H}(\mathbb{A})/Z(\mathbb{A})\bar{H}(F)} \int_{H(\mathbb{A})/Z(\mathbb{A})H(F)} K_{\Phi}\left(\bar{h}^{-1}, h\right) \psi\left(\bar{h}\right) \theta\left(h\right) d\bar{h}\, dh \tag{5}$$
$$= \sum_{\varepsilon} \int_{\bar{R}_{\varepsilon}(\mathbb{A})/Z_{\varepsilon}(\mathbb{A})\bar{R}_{\varepsilon}(F)} \int_{R_{\varepsilon}(\mathbb{A})/Z_{\varepsilon}(\mathbb{A})R_{\varepsilon}(F)} K_{\Phi_{\varepsilon}}\left(\bar{r}^{-1}, r\right) \xi\left(\bar{r}\right) \tau\left(r\right) d\bar{r}\, dr.$$

ただし、ここでεは、$F^{\times}/N_{E/F}(F^{\times})$を走り、$\Phi$と$\Phi_{\varepsilon}$は*match*する試験函数であるとする。（正確には、両辺を適当に正規化された意味で解釈する必要がある。）

これは、GL (2) に関する Jacquet の相対跡公式 [10] の GSp (4) への一般化に他ならず、その場合と同様な結論がこの相対跡公式から引き出されると期待される。

具体的には、Novodvorsky [11] による、GSp (4) の Whittaker 係数を持つような尖点形式に対するスピノルL函数の積分表示を思い起こすと、次の様な結論の従うことが期待される：

予想 (Furusawa-Shalika) 2. πを$\mathrm{GSp}_4(\mathbb{A}_F)$の自明な中心指標を持つ、*generic, i.e. Whittaker*係数を持つような既約尖点表現とする。このとき、πのスピノルL函数を$L(s,\pi)$とすると、

$$L(1/2,\pi)\, L(1/2,\pi\otimes\chi) \neq 0$$

となる必要十分条件は、$\varepsilon \in F^{\times}/N_{E/F}(E^{\times})$、*functorial*な意味で$\pi$に対応する$G_{\varepsilon}$の既約尖点表現$\pi_{\varepsilon}$、$\pi_{\varepsilon}$の保型形式の空間に属する尖点形式$\varphi$、からなる三つ組み$(\varepsilon, \pi_{\varepsilon}, \varphi)$で、

$$\int_{Z_{\varepsilon}(\mathbb{A})R_{\varepsilon}(F)\backslash R_{\varepsilon}(\mathbb{A})} \varphi(r)\, \tau(r)\, dr \neq 0 \tag{6}$$

となるものが存在することである。

（ここで読者は、このタイプの予想が一般的に定式化されている Gross と Prasad の論文 [6] を参照されたい。）

さらに詳細な解析によって、$L(1/2,\pi)\,L(1/2,\pi\otimes\chi)$ は、上記のような周期積分の絶対値の二乗と、π のみに依存し二次拡大 E には依存しない正の定数 C_π の積として表わされると期待される。さらに、この定数 C_π については初等的な明示公式が期待される。このアイデアをさらに展開してゆくにあたっては、Gross と Prasad の local な予想 [7] が深く関わってくることは言うまでもない。

もうひとつ、次の事実を指摘しておきたい。Guo [9] は、Jacquet の主アイデアを発展させて、GL (2) の場合に、L 函数の中心に置ける値の非負性を示した。彼はまた、[8] において、GL $(2n)$ の場合について、Jacquet の GL (2) についての fundamental lemma の類似を証明した。この方向を進んでいくことによって、我々と Guo のアプローチのいずれによってもGSp (4) のスピノル L 函数の中心での値の非負性が証明可能であると思われる。

3 主結果

さて、(5) のような（相対）跡公式を証明するにあたって、第一にしなければならないことは、fundamental lemma と呼ばれる Hecke 環の単位元に関する軌道積分の間の等式を証明することである。これは、跡公式成立の evidence としてはとても強いものであることを注意しておきたい。

これから最後までは、F は剰余標数が 2 でない非アルキメデス局所体とし、ψ は F の加法的指標で F の整数環 $\mathcal{O}$ を導手に持つものとする。そして、$E=F\left(\sqrt{-d}\right)$, $-d\in\mathcal{O}^\times$ を F の唯一の不分岐二次拡大とする。

両側剰余類 $\bar{H}kH$ が**relevant** とは写像 $\bar{h}kh\mapsto\psi\left(\bar{h}\right)\theta\left(h\right)$ が well defined であること、すなわち、$\psi\left(\bar{h}\right)=\theta\left(k^{-1}\bar{h}k\right)$ が任意の $\bar{h}\in\bar{H}\cap kHk^{-1}$ に対して成り立つことをいう。相対跡公式に現われてくるのは、relevant な両側剰余類のみである。

P を G の**上 Siegel 放物部分群**、

$$P=\left\{\begin{pmatrix} g & 0\\ 0 & \lambda{}^tg^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1_2 & X\\ 0 & 1_2\end{pmatrix}\,\middle|\, g\in\mathrm{GL}(2),\,\lambda\in\mathrm{GL}(1),\,X={}^tX\right\}$$

とし、$\bar{P}=\{{}^tp|\,p\in P\}$ とする。そして、$g\in\mathrm{GL}(2)$ と $\lambda\in\mathrm{GL}(1)$ に対して、(g,λ) で G の元 $\left(\begin{smallmatrix} g & 0\\ 0 & \lambda{}^tg^{-1}\end{smallmatrix}\right)$ を表わす。このとき：

命題 1. *big cell* $\bar{P}P$ に含まれる *relevant* 両側剰余類は、

$$\bar{H}\,(g,\lambda)\,H$$

ただし、

$$g = \left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right),\ x \in F \setminus \{0,1\}$$

または、

$$g = n_+,\ \ n_-\ \ ,wn_+,\ \ wn_-$$

ただし、

$$n_+ = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right),\ \ n_- = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right),\ \ w = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$$

の形に表わされる。

同様に $G_1\,(= G_{D_1}) \simeq G$ の両側剰余類 $\bar{R}_1 s R_1$ が relevant であるとは、写像 $\bar{r}sr \mapsto \xi\,(\bar{r})\,\tau\,(r)$ が well defined であること、すなわち $\xi\,(\bar{r}) = \tau\,(s^{-1}\bar{r}s)$ が任意の $\bar{r} \in \bar{R}_1 \cap sR_1s^{-1}$ に対して成り立つことをいう。P_1 を G_1 の**上 Siegel 放物部分群**、

$$P_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \lambda\bar{a}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, a \in D_1^\times,\ \lambda \in \mathrm{GL}(1),\ x \in D_1^- \right\}$$

とし、$\bar{P}_1 = \{{}^tp \mid p \in P_1\}$ とする。そして、$a \in D_1^\times$ と $\lambda \in \mathrm{GL}(1)$ に対して G_1 の元 (a,λ) を $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & \lambda\bar{a}^{-1} \end{smallmatrix}\right)$ によって定める。このとき：

命題 2. *big cell* $\bar{P}_1P_1$ に含まれる両側剰余類はすべて *relevant* でそれらは、

$$\bar{R}_1\,(a,\lambda)\,R_1$$

ただし、

$$a = \left(\begin{smallmatrix} 1 & u \\ u^\sigma & 1 \end{smallmatrix}\right),\quad u \in E^\times/\{v^{-1}v^\sigma \mid v \in E^\times\},\ \ N_{E/F}\,(u) = uu^\sigma \neq 1$$

または

$$a = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$$

の形に表わされる。

Ξ を G の極大コンパクト部分群 $G(\mathcal{O})$ の特性函数とする。このとき、$x \in F \setminus \{0,1\}$ と $\lambda \in F^{\times}$ に対して、**Novodvorsky 軌道積分**$\mathcal{N}(x,\lambda)$ を

$$\mathcal{N}(x,\lambda) = \int_{\bar{H}} \int_{H/Z} \Xi\left(\bar{h}\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right), \lambda\right) h\right) \psi\left(\bar{h}\right) \theta(h)\, d\bar{h}\, dh$$

によって定める。

同様に、Ξ_1 を G_1 の極大コンパクト部分群 $G_1 \cap \mathrm{GL}(4, \mathcal{O}_E)$ (ただし、$\mathcal{O}_E$ は E の整数環) の特性函数とする。このとき、$u \in E^{\times}$ で $N_{E/F}(u) = uu^{\sigma} \neq 1$ となるものと $\lambda \in F^{\times}$ に対して、**Bessel 軌道積分**$\mathcal{B}(u,\lambda)$ を

$$\mathcal{B}(u,\lambda) = \int_{\bar{R}_1} \int_{R_1/Z_1} \Xi_1\left(\bar{r}\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & u \\ u^{\sigma} & 1 \end{smallmatrix}\right), \lambda\right) r\right) \xi(\bar{r})\, \tau(r)\, d\bar{r}\, dr$$

によって定める。

このとき、我々の主結果は次の通りである：

主定理． *1.* もし x の付値 $v(x)$ が奇数ならば、$\mathcal{N}(x,\lambda) = 0$ である。

2. $v(x)$ が偶数であるとする。このとき、$u \in E^{\times}$ を $N_{E/F}(u) = uu^{\sigma} = x$ となるようにとると：

$$\mathcal{N}(x,\lambda) = \mathcal{B}(u,\lambda)$$

が成り立つ。

証明は両方の積分を具体的に計算し、それらを古典的な GL (2) に関する Kloosterman 和で表わすことによって得られる。証明の詳細については、[5] を見られたい。

そして、この主定理は、対応する二つの両側剰余類 $\bar{H}\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right), \lambda\right) H$ と $\bar{R}_1\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & u \\ u^{\sigma} & 1 \end{smallmatrix}\right), \lambda\right) R_1$ についての fundamental lemma の成立を示している。

参考文献

[1] S. Böcherer, *Bemerkungen über die Dirichletreihen von Koecher und Maaß*, Preprint Math. Gottingensis Heft **68** (1986).

[2] S. Böcherer and R. Schulze-Pillot, *The Dirichlet series of Koecher and Maass and modular forms of weight* $\frac{3}{2}$, Math. Z. **209** (1992), 273–287.

[3] P. Deligne, *Valeurs de fonctions L et périodes d'intégrales*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics **33**, part 2 (1979), 313–346.

[4] M. Furusawa and J. A. Shalika, *The fundamental lemma for the Bessel and Novodvorsky subgroups of* GSp (4), C. R. Acad. Sci. Paris, t. **328**, Série I (1999), 105–110.

[5] M. Furusawa and J. A. Shalika, *The fundamental lemma for the Bessel and Novodvorsky subgroups of* GSp (4), in preparation.

[6] B. H. Gross and D. Prasad, *On the decomposition of a representation of* SO_n *when restricted to* SO_{n-1}, Canad. J. Math. **44** (1992), 974–1002.

[7] B. H. Gross and D. Prasad, *On irreducible representations of* $\mathrm{SO}_{2n+1} \times \mathrm{SO}_{2m}$, Canad. J. Math. **46** (1994), 930–950.

[8] J. Guo, *On a generalization of a result of Waldspurger*, Canad. J. Math. **48** (1996), 104–142.

[9] J. Guo, *On the positivity of the central critical values of automorphic L-functions for* GL (2), Duke Math. J. **83** (1996), 157–190.

[10] H. Jacquet, *Sur un résultat de Waldspurger*, Ann. scient. Éc. Norm. Sup., 4^e série, t.**19** (1986), 185–229.

[11] M. E. Novodvorsky, *Automorphic L-functions for symplectic group* GSp(4), Proceedings of Symposia in Pure Mathematics **33**, part 2 (1979), 87–95.

[12] T. Sugano, *On holomorphic cusp forms on quaternion unitary groups of degree* 2, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA, Math. **31** (1984), 521–568.

[13] J.-L. Waldspurger, *Sur les valeurs de certaines fonction L automorphes en leur centre de symétrie*, Compos. Math. **54** (1985), 173–242.

[14] H. Yoshida, *Siegel's modular forms and the arithmetic of quadratic forms*, Invent. math. **60** (1980), 193–248.